Teorema di Schauder per soluzioni di problemi ellittici in forma divergenza

1. Introduzione

Setting. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^1(\Omega)$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale continuo su Ω, o più in generale in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Ricordiamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega\ ,$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot A(x)[\nabla v]\, dx = \int_\Omega f(x) v\, dx - \int_\Omega F(x) \cdot \nabla v\, dx \qquad \text{per ogni} \qquad v \in H^1_0(\Omega),$$

dove la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

è una matrice a coefficienti variabili con le seguenti proprietà:

- i coefficienti di A sono funzioni Hölder continue:
$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{per ogni coppia di indici} \quad 1 \le i, j \le d.$$
- A è simmetrica:
$$a_{ij} \equiv a_{ji} : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{per} \qquad 1 \le i, j \le d,$$
- A è uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, ovvero esistono costanti $0 < c \le C$ tali che
$$c\, \mathrm{Id} \le A(x) \le C\, \mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega.$$

Teorema 1 ($C^{1,\alpha}$ Schauder all'interno)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

---

2. Risultati preliminari

Continuità Lipschitz. Sappiamo già che la soluzione u è Lipschitz continua in Ω.

Cambio delle variabili. Per ogni $x_0 \in \Omega$, esiste una matrice simmetrica $B \in S_d(\mathbb{R})$ che dipende da x_0 (scriveremo anche B_{x_0} al posto di B) ed è tale che

$$B_{x_0} A_{x_0} B_{x_0} = \mathrm{Id}.$$

La funzione

$$v(y) = u(B_{x_0}^{-1} y)$$

è soluzione di

$$-\mathrm{div}(\widetilde{A}\, \nabla v) = g + \mathrm{div}\, G \quad \text{in} \quad B_{x_0}(\Omega),$$

dove $\widetilde{A}$, g e G hanno le proprietà seguenti:

- $\widetilde{A}$ è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica, a coefficienti variabili e con coefficienti in $C^{1,\alpha}$.
$$\widetilde{A}(x) = B_{x_0} A(B_{x_0}^{-1} x) B_{x_0} \quad \text{per ogni} \quad x \in B(\Omega)\ ;$$
$$\widetilde{A}(y_0) = Id \qquad \text{dove} \qquad y_0 = B_{x_0}[x_0]\ .$$
- g è una funzione in $L^p(B(\Omega))$
$$g(y) = f(B_{x_0}^{-1} y)$$

- Il campo G è $C^{0,\beta}$ su $B(\Omega)$ per un qualche $\beta > 0$ universale (ovvero che non dipende dal punto x_0) ed è tale che:
$$F(x) = B_{x_0}[G(B_{x_0}x)] \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega.$$

Quasi-minimalità. Dato un insieme aperto
$$\omega \Subset \Omega$$
esiste un raggio universale $\rho > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \omega$ ed ogni $R \in (0, \rho)$ si ha che
$$\fint_{B_R(x_0)} |\nabla(v-h)|^2\,dx \le 4C_A R^\alpha \fint_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2\,dx + 4\Big(C_d\|f\|_{L^p(\Omega)}R^{1-d/p} + C_F R^\beta\Big),$$
dove h è la funzione armonica
$$\Delta h = 0 \quad \text{in} \quad B_R(x_0), \qquad h = v \quad \text{su} \quad \partial B_R(x_0).$$
Possiamo assumere che esistono due costanti
$$C > 0 \qquad \text{e} \qquad \alpha \in (0,1)$$
che dipendono da Ω e ρ e sono tali che
$$\fint_{B_R(x_0)} |\nabla(v-h)|^2\,dx \le CR^\alpha.$$

---

3. Differenziabilità di u

Mostreremo che u è differenziabile nel punto $x_0 = 0$.

Possiamo supporre che $u(x_0) = 0$.

Osserviamo che basta mostrare la differenziabilità di v nel punto $y_0 = B_{x_0}[x_0] = 0$.

3.1. Blow-up e differenziabilità.

Per ogni $r > 0$ consideriamo la funzione
$$v_r(x) := \frac{1}{r}v(xr)$$
e osserviamo che u_r è definita sulla palla $B_{\rho/r}$. Di conseguenza, fissato un raggio $R > 0$ e scegliendo r abbastanza piccolo , in modo tale che $R < \dfrac{\rho}{r}$, la funzione v_r è definita su B_R. Inoltre, abbiamo che
$$v_r(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad |\nabla v_r| \le L \quad \text{in} \quad B_R,$$
dove L è la costante Lipschitz di v. Di consegunenza, ogni successione $r_n \to 0$ ammette una sottosuccessione $(r_n)_n$ tale che
$$v_{r_n} : B_R \to \mathbb{R}$$
converge uniformemente ad una qualche funzione
$$v_0 : B_R \to \mathbb{R}$$
tale che
$$v_0(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad |\nabla v_0| \le L \quad \text{in} \quad B_R.$$
Per un argomento di successione diagonale, abbiamo che esistono una sottosuccessione di r_n ed una funzione
$$v_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$
tale che
$$v_0(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad |\nabla v_0| \le L \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d,$$
$$\lim_{n\to\infty} \|v_{r_n} - v_0\|_{L^\infty(B_R)} = 0 \quad \text{per ogni} \quad R > 0.$$

Definizione 2 (Blow-up). *La funzione v_0 è detta blow-up di v in 0. (Osserviamo che v_0 dipende dalla successione v_{r_n}. Infatti, a successioni diverse potrebbero corrispondere blow-up diversi.)*

3.2. **Quasi-minimalità di v_r.** Siano $R > 0$ un raggio fissato ed $r > 0$ un raggio abbastanza piccolo e tale che

$$v_r \in H^1(B_R).$$

Sia $h_r \in H^1(B_R)$ la funzione armonica in B_R con dato al bordo u_r, ovvero

$$\Delta h_r = 0 \quad \text{in} \quad B_R\,, \qquad h_r - v_r \in H^1_0(B_R).$$

Allora,

$$\fint_{B_R} |\nabla(v_r - h_r)|^2\,dx = \fint_{B_{rR}} |\nabla(v - h)|^2\,dx,$$

dove $h \in H^1(B_{rR})$ la funzione armonica in B_{rR} con dato al bordo u. È immediato verificare che $h_r(x) = \frac{1}{r}h(rx)$.

Ora, usando la quasi-minimalità di v si ha

$$\fint_{B_R} |\nabla(v_r - h_r)|^2\,dx = \fint_{B_{rR}} |\nabla(v - h)|^2\,dx \le Cr^\alpha R^\alpha.$$

In particolare, siccome

$$\int_{B_R} |\nabla(v_r - h_r)|^2\,dx = \int_{B_R} |\nabla v_R|^2\,dx - \int_{B_R} |\nabla h_r|^2\,dx,$$

abbiamo che

$$\int_{B_R} |\nabla v_r|^2\,dx \le \int_{B_R} |\nabla h_r|^2\,dx + Cr^\alpha R^{d+\alpha}.$$

Infine, siccome h_r minimizza l'integrale di Dirichlet in B_R,

$$\int_{B_R} |\nabla v_r|^2\,dx \le \int_{B_R} |\nabla(v_r + \varphi)|^2\,dx + Cr^\alpha R^{d+\alpha} \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H^1_0(B_R).$$

Equivalentemente,

$$-2\int_{B_R} \nabla v_r \cdot \nabla\varphi\,dx \le \int_{B_R} |\nabla\varphi|^2\,dx + Cr^\alpha R^{d+\alpha} \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H^1_0(B_R). \tag{1}$$

3.3. **Classificazione dei blow-up.**

Osservazione 3 (Convergenza debole delle successioni di blow-up)**.** *Sia v_{r_n} una successione di blow-up che converge a v_0 uniformemente in ogni $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Inoltre, siccome $|\nabla v_{r_n}| \le L$ in B_R e $v_{r_n}(0) = 0$, abbiamo che v_{r_n} è limitata in $H^1(B_R)$. In particolare, ogni sottosuccessione ammette una sottosottosuccessione che converge debole $H^1(B_R)$ a v_0. Di conseguenza, v_{r_n} converge debole-$H^1(B_R)$ a v_0 per ogni $R > 0$.*

Lemma 4. *I blow-up della soluzione v sono funzioni armoniche su $\mathbb{R}^d$.*

Proof. Sia v_{r_n} una successione di blow-up che converge a $v_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uniformemente e debole-H^1 in ogni B_R. Fissiamo una funzione $\varphi \in H^1_0(B_R)$. Da (1) abbiamo che

$$-2\int_{B_R} \nabla v_{r_n} \cdot \nabla\varphi\,dx \le \int_{B_R} |\nabla\varphi|^2\,dx + Cr_n^\alpha R^{d+\alpha}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, otteniamo

$$-2\int_{B_R} \nabla v_0 \cdot \nabla\varphi\,dx \le \int_{B_R} |\nabla\varphi|^2\,dx.$$

Di conseguenza,

$$\int_{B_R} |\nabla v_0|^2\,dx \le \int_{B_R} |\nabla(v_r + \varphi)|^2\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H^1_0(B_R).$$

e quindi v_0 è armonica in B_R. Siccome $R > 0$ è arbitrario, v_0 è armonica in $\mathbb{R}^d$. □

Lemma 5. *I blow-up della soluzione v sono funzioni lineari su $\mathbb{R}^d$.*

Proof. Sia $v_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un blow-up di v. Allora, v_0 è armonica e lipschitziana in $\mathbb{R}^d$. In particolare, le derivate parziali $\partial_j v_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sono funzioni armoniche e limitate in $\mathbb{R}^d$. Per il teorema di Liouville, le derivate parziali $\partial_j v_0$ sono costanti su $\mathbb{R}^d$. Di conseguenza, v_0 è della forma

$$v_0(x) = c + \nu \cdot x,$$

dove ν è il gradiente di v_0 in zero. Siccome, $v_0(0) = 0$, abbiamo che $c = 0$ e quindi v_0 è lineare. □

Osservazione 6. *Per mostrare la differenziabilità della funzione v in zero bisogna dimostrare che il blow-up di v in 0 è unico. Infatti, data una funzione v definita in un intorno dell'origine e tale che $v(0) = 0$, sono equivalenti:*

(i) *v è differenziabile in zero;*
(ii) *esiste una funzione lineare $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{r\to\infty} \|v_r - L\|_{L^\infty(B_1)} = 0.$$

3.4. **Convergenza forte delle successioni di blow-up.**

Lemma 7. *Sia $v_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un blow-up di v in 0. Sia v_{r_n} una successione che converge a v_0 uniformemente su ogni palla B_R di $\mathbb{R}^d$. Allora, per ogni $R > 0$, v_{r_n} converge a v_0 forte-$H^1(B_R)$.*

Proof. Possiamo supporre che

$$v_{r_n} \to v_0 \quad \text{forte-}L^2(B_R) \qquad \text{e} \qquad v_{r_n} \rightharpoonup v_0 \quad \text{debole-}H^1(B_R),$$

per ogni $R > 0$. Fissato $R > 0$, mostreremo che

$$v_{r_n} \to v_0 \quad \text{forte-}H^1(B_R).$$

Per semplicità scriveremo

$$v_n := v_{r_n}.$$

Sia ϕ una funzione in $C_c^\infty(B_{2R})$ tale che

$$0 \le \phi \le 1 \quad \text{in} \quad B_{2R} \qquad \text{e} \qquad \phi \equiv 1 \quad \text{su} \quad B_R.$$

Per la quasi-minimaità di v_n, esiste una successione

$$\varepsilon_n \to 0$$

tale che

$$\int_{B_{2R}} |\nabla v_n|^2 \, dx \le \int_{B_{2R}} \big|\nabla\big(v_n + (v_0 - v_n)\phi\big)\big|^2 \, dx + \varepsilon_n.$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned}
0 &\le \lim_{n\to 0} \left(\int_{B_{2R}} \big|\nabla\big(v_n + (v_0 - v_n)\phi\big)\big|^2 \, dx - \int_{B_{2R}} |\nabla v_n|^2 \, dx \right) \\
&= \lim_{n\to 0} \int_{B_{2R}} \Big(2\nabla v_n \cdot \nabla\big((v_0 - v_n)\phi\big) + \big|\nabla\big((v_0 - v_n)\phi\big)\big|^2 \Big) \, dx \\
&= \lim_{n\to 0} \int_{B_{2R}} \Big(2\phi \nabla v_n \cdot \nabla\big(v_0 - v_n\big) + \big|\nabla(v_0 - v_n)\big|^2 \phi^2 \Big) \, dx,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la convergenza debole di $\nabla(v_n - v_0)$ e la convergenza forte di $v_n - v_0$ in L^2. Sempre per la convergenza debole di $\nabla(v_n - v_0)$ abbiamo

$$\begin{aligned}
0 &\le \lim_{n\to 0} \int_{B_{2R}} \Big(2\phi \nabla v_n \cdot \nabla\big(v_0 - v_n\big) + \big|\nabla(v_0 - v_n)\big|^2 \phi^2 \Big) \, dx \\
&\le \lim_{n\to 0} \int_{B_{2R}} \Big(2\phi \nabla(v_n - v_0) \cdot \nabla\big(v_0 - v_n\big) + \big|\nabla(v_0 - v_n)\big|^2 \phi^2 \Big) \, dx,
\end{aligned}$$

che possiamo scrivere anche come

$$0 \le \lim_{n\to 0} \int_{B_{2R}} \Big((1 - \varphi)^2 - 1 \Big) |\nabla(v_0 - v_n)|^2 \, dx \le \lim_{n\to 0} \int_{B_R} -|\nabla(v_0 - v_n)|^2 \, dx. \qquad \square$$

4. Formula di Weiss e disuguaglianza epiperimetrica

In questa sezione useremo la formula di Weiss e la disuguaglianza epiperimetrica per ottenere informazione sulla convergenza della successioni di blow-up v_r. Useremo le seguenti proprietà di v_r:

- quasi-minimalità:
$$\int_{B_1} |\nabla v_r|\,dx \le \int_{B_1} |\nabla h_r|^2\,dx + Cr^\alpha \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,R),$$
dove h_r è la funzione armonica in B_1 con dato al bordo v_r;
- la convergenza forte-$H^1(B_1)$ delle successioni di blow-up v_{r_n};
- il fatto che i blow-up sono minimi (nel nostro caso che sono funzioni armoniche).

4.1. La formula di Weiss e la quasi-minimalità.

Lemma 8. *Per ogni $r \in (0,R)$ abbiamo*
$$\frac{\partial}{\partial r} W(v_r) \ge -dCr^{\alpha-1}.$$

Proof. Segue direttamente dalla formula di Weiss e la quasi-minimalità di v. □

In particolare, esiste il limite
$$\lim_{r\to 0} W(v_r)$$
Inoltre, se per una successione $v_{r_n} \to 0$ si ha che
$$v_{r_n} \to v_0 \quad \text{in} \quad H^1(B_1),$$
dove v_0 è un qualsiasi blow-up di v in 0, allora abbiamo anche
$$\lim_{r\to 0} W(v_r) = \lim_{n\to+\infty} W(v_{r_n}) = W(v_0).$$
Ora, siccome i blow-up sono lineari,
$$W(v_0) = 0$$
e quindi
$$\lim_{r\to 0} W(v_r) = 0.$$
Di conseguenza,
$$W(v_r) \ge -\frac{dC}{\alpha} r^\alpha \quad \text{per ogni} \quad r \in (0,R). \tag{2}$$

4.2. Formula di Weiss, quasi-minimalità e disuguaglianza epiperimetrica.

Usando la formula di Weiss, la quasi-minimalità e la disuguaglianza epiperimetrica per l'energia W, abbiamo
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} W(v_r) &= \frac{d}{r}\Big(W(z_r) - W(v_r)\Big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\
&\ge \frac{d}{r}\Big(\frac{W(h_r)}{1-\varepsilon} - W(v_r)\Big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\
&\ge \frac{d}{r}\Big(\frac{W(v_r) - Cr^\alpha}{1-\varepsilon} - W(v_r)\Big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}(x) \\
&\ge \frac{d}{r}\Big(\varepsilon W(v_r) - Cr^\alpha\Big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}(x),
\end{aligned}$$
per ogni
$$\varepsilon \in \left(0\,, \frac{1}{d+1}\right).$$
Scegliendo ε abbastanza piccolo, possiamo supporre che
$$\boxed{\boxed{\gamma := d\varepsilon \le \frac{\alpha}{2}}}$$

e dividendo per γ, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{W(v_r)}{r^\gamma}+\frac{dC}{\gamma}r^\gamma\right)\geq \frac{1}{r^{1+\gamma}}\int_{\partial B_1}|x\cdot\nabla u_r-u_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}(x). \tag{3}$$

Come conseguenza, otteniamo:

Lemma 9. *La funzione*

$$e(r):=\left(\frac{W(v_r)}{r^\gamma}+\frac{dC}{\gamma}r^\gamma\right)$$

è non-decrescente su $(0,R]$. *Inoltre, da* (2) *segue che*

$$e(r)\geq 0\quad \textit{per ogni}\quad r\in(0,R].$$

Lemma 10.

$$\int_0^R\frac{1}{r^{1+\gamma}}\int_{\partial B_1}|x\cdot\nabla v_r-v_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}(x)\,dr\leq e(R).$$

Proof. Usando (3) e la positività di e abbiamo

$$\int_s^R\frac{1}{r^{1+\gamma}}\int_{\partial B_1}|x\cdot\nabla v_r-v_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}(x)\,dr=e(R)-e(s)\leq e(R),$$

per ogni $s>0$. Passando al limite per $s\to 0$, abbiamo la tesi. □

Lemma 11.

$$\|v_t-v_s\|^2_{L^2(\partial B_1)}\leq\frac{C_R}{\gamma}t^\gamma\quad \textit{per ogni}\quad 0<s<t\leq R.$$

Proof. Per ogni fissato $x\in\mathbb{R}^d$ calcoliamo

$$\begin{aligned}|v_t(x)-v_s(x)|&\leq\int_s^t\left|\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}v(rx)\right)\right|dr\\&=\int_s^t\frac{1}{r}\left|x\cdot\nabla v(rx)-\frac{1}{r}v(rx)\right|dr=\int_s^t\frac{1}{r}\left|x\cdot\nabla v_r(x)-v_r(x)\right|dr.\end{aligned}$$

Integrando sulla sfera ∂B_1, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1}|v_t(x)-v_s(x)|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}(x)&\leq\int_{\partial B_1}\left(\int_s^t\frac{1}{r}|x\cdot\nabla v_r(x)-v_r(x)|\,dr\right)^2d\mathcal{H}^{d-1}(x)\\&\leq\int_{\partial B_1}\left(\int_s^t\frac{1}{r^{1-\gamma}}\,dr\right)\left(\int_s^t\frac{1}{r^{1+\gamma}}|x\cdot\nabla v_r(x)-v_r(x)|^2\,dr\right)d\mathcal{H}^{d-1}(x)\\&\leq\frac{t^\gamma}{\gamma}\int_{\partial B_1}\int_s^t\frac{1}{r^{1+\gamma}}|x\cdot\nabla v_r(x)-v_r(x)|^2\,dr\,d\mathcal{H}^{d-1}(x).\end{aligned}$$

□

---

5. Differenziabilità di u e continuità del gradiente

Proposizione 12. *Per ogni* $L>0$ *esistono* $\delta>0$ *e* $C>0$ *tali che se*

$$\varphi:B_1\to\mathbb{R}\qquad e\qquad \psi:B_1\to\mathbb{R}$$

sono due funzioni L-Lipschitziane e tali che

$$\|\varphi-\psi\|_{L^1(B_1)}\leq\delta,$$

allora

$$\|\varphi-\psi\|_{L^\infty(B_1)}\leq C\|\varphi-\psi\|^{\frac{1}{d+1}}_{L^1(B_1)}.$$

Di conseguenza, abbiamo

Teorema 13. *Sia u la soluzione del problema del Teorema 1. Allora, per ogni compatto $\mathcal{K} \subset \Omega$ esistono un raggio $R > 0$ e due costanti $C > 0$ e $\gamma > 0$ con la seguente proprietà: per ogni $x_0 \in \mathcal{K}$ esiste un'unica funzione lineare*

$$L_{x_0} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

tale che

$$\left\| \frac{u(x_0 + rx) - u(x_0)}{r} - L_{x_0}(x) \right\|_{L^\infty_x(B_1)} \le Cr^\gamma \quad \textit{per ogni} \quad r \in (0, R).$$

In particolare, u è differenziabile in x_0. Inoltre, il gradiente

$$\nabla u : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^d$$

è una funzione Hölderiana.

Proof. **Unicità del blow-up.** Siano $x_0 \in \mathcal{K}$ e B_{x_0} la matrice simmetrica tale che

$$B_{x_0} A_{x_0} B_{x_0} = Id.$$

Siano $\widetilde{u}(x) := u(x + x_0) - u(x_0)$ e $v := \widetilde{u} \circ B_{x_0}^{-1}$. Per i risultati della sezione precedente, esistono due costanti C, R che dipendono da $\mathcal{K}$, Ω, A, f ed F tali che

$$\|v_t - v_s\|_{L^2(\partial B_1)} \le t^\gamma \quad \text{per ogni} \quad 0 < s < t < R$$

In particolare, $(v_t)_{t>0}$ è di Cauchy in $L^2(\partial B_1)$ e quindi esiste una funzione

$$v_0 \in L^2(\partial B_1)$$

tale che

$$\|v_t - v_0\|_{L^2(\partial B_1)} \le Ct^\gamma \quad \text{per ogni} \quad 0 < t < R.$$

In particolare, v_0 è l'unico blow-up di v in 0 ed è definito su tutto $\mathbb{R}^d$.
Differenziabilità di u. Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} |v_r - v_0|^2 \, dx &= \frac{1}{r^{d+2}} \int_{B_r} |v - v_0|^2 \, dx \\
&= \frac{1}{r^{d+2}} \int_0^r \int_{\partial B_t} |v - v_0|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \, dt \\
&= \frac{1}{r^{d+2}} \int_0^r t^{d+1} \int_{\partial B_1} |v_t - v_0|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \, dt \\
&\le \frac{1}{r^{d+2}} \int_0^r t^{d+1} C t^\gamma \, dt \le Cr^\gamma.
\end{aligned}$$

Siccome v è L-Lipschitz per una costante di Lipschitz che non dipende dal punto x_0, ma solo da $\mathcal{K}$ e le variabili del problema, abbiamo che esistono costanti $C > 0$ ed $\alpha > 0$ tali che

$$\|v_r - v_0\|_{L^\infty(B_1)} \le Cr^\alpha \quad \text{per ogni} \quad r < R.$$

Ora definiamo la funzione lineare

$$L_{x_0} := v_0 \circ B_{x_0}.$$

Cambiando le variabili, abbiamo che

$$\|u_{r,x_0} - L_{x_0}\|_{L^\infty(B_1)} \le Cr^\alpha \quad \text{per ogni} \quad r < \rho,$$

dove C, α e ρ sono universali per tutti i punti $x_0 \in \mathcal{K}$. Di conseguenza, u è differenziabile in x_0.
Continuità del gradiente. Siano ora x_0 e y_0 due punti di $\mathcal{K}$. Sia $r > 0$. Allora

$$\|u_{r,x_0} - L_{x_0}\|_{L^\infty(B_1)} \le Cr^\alpha \quad \text{e} \quad \|u_{r,y_0} - L_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)} \le Cr^\alpha.$$

Per la disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$\begin{aligned}
|\nabla u(x_0) - \nabla u(y_0)| = \|L_{x_0} - L_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)} &\le \|u_{r,x_0} - L_{x_0}\|_{L^\infty(B_1)} \\
&\quad + \|u_{r,x_0} - u_{r,y_0}\|_{L^\infty(B_1)} \\
&\quad + \|u_{r,y_0} - L_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)} \\
&\le 2Cr^\alpha + \|u_{r,x_0} - u_{r,y_0}\|_{L^\infty(B_1)}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che siccome u è L-Lipschitz, si ha

$$\begin{aligned}\|u_{r,x_0} - u_{r,y_0}\|_{L^\infty(B_1)} &= \frac{1}{r} \sup_{x\in B_1} \left|\big(u(x_0+rx) - u(x_0)\big) - \big(u(y_0+rx) - u(y_0)\big)\right| \\ &= \frac{1}{r} \sup_{x\in B_1} \Big(\left|u(x_0+rx) - u(y_0+ry)\right| + \left|u(x_0) - u(y_0)\right|\Big) \\ &\le \frac{1}{r} 2L|x_0 - y_0|.\end{aligned}$$

Ora, scegliendo

$$r := |x_0 - y_0|^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

otteniamo

$$|\nabla u(x_0) - \nabla u(y_0)| \le 2Cr^\alpha + \frac{1}{r} 2L|x_0 - y_0| \le (2C + 2L)|x_0 - y_0|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}},$$

dove, possiamo la disuguaglianza vale per i punti x_0, y_0 tali che $|x_0 - y_0| \le \rho^{1+\alpha}$. $\square$